Chap 3 : 4-8

Monte Carlo Simulation

韓傳祥

清華大學 計量財務金融學系

蒙地卡羅方法

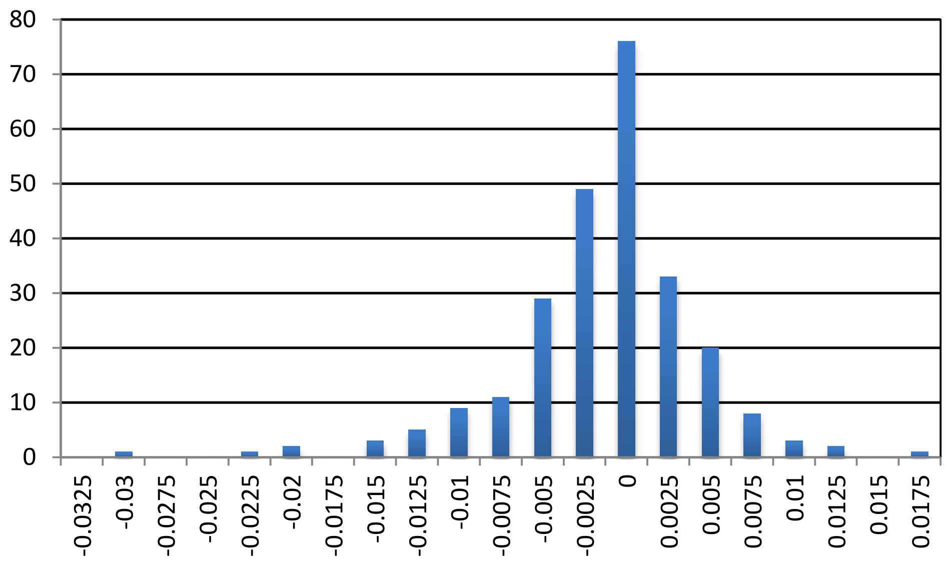
- 若一種方法能夠根據一個事前決定的機率分配，利用抽樣的方法對既定的區域來估測一個特別的度量，則其可稱之為蒙地卡羅方法

亂數產生器

- 由決定性的算法 (deterministic algorithms) 產生出均勻 (uniform) 分布的樣本，只要能夠對均勻變數 U 進行抽樣，則藉由分佈函數 F_X，就可以對隨機變數 X 抽樣了。

歷史模擬法

- 將已經發生過（或實現過）的許多歷史價格的報酬假想為將來可能產生的價格變化。



S&P 500 指數日報酬率的直方圖

蒙地卡羅方法

- 在許多金融工程的應用中，期望值的計算問題會很自然的發生。這些應用包括了選擇權的訂價問題、違約 (default) 或倒閉 (ruin, bankrupt) 機率的估計等等。

$$E[h(X)] = \int h(x) f_X(x) dx$$

- 一個基本或者是原始的蒙地卡羅方法，其理論仰賴於大數法則以及中央極限定理，大數法則確保了樣本平均 (sample mean) 的收斂性。
- 中央極限定理進一步提供了估計式的誤差分析 (error analysis)。

強大數法則 (Strong Law of Large Numbers)

Let $(\mathrm{X_i}, \mathrm{i} \geq 1)$ be a sequence of independent random variables following the same distribution as a random variable X. We assume that the $\mathrm{E}\{|\mathrm{X}|\} < +\infty$. Then,

$$\mathrm{E}\{\mathrm{X}\} = \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \mathrm{S_N} \text{ almost surely,}$$

where the sample mean $\mathrm{S_N} = \frac{1}{\mathrm{N}}(\mathrm{X_1} + \mathrm{X_2} + \cdots + \mathrm{X_N})$ and N is the sample size.

That is

$$\mathrm{P}\left(\lim_{\mathrm{N}\to\infty} \mathrm{S_N} = \mathrm{E}\{\mathrm{X}\}\right) = 1$$

估計式 (estimator)

1. S_N 是不偏的估計式 (unbiased estimator)。由樣本間的獨立性，很容易確認統計上對不偏的定義 $E\{S_N\} = E\{X\}$ 會成立。

2. S_N 的變異數為 $Var(S_N) = \sigma_X^2/_N$。

要增加估計式精準度的辦法只有兩個。其一是增加樣本數 N ；其二是減少變異數 ${\sigma_X}^2$

$$S_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h(X_i) \approx E\{h(X)\}。$$

中央極限定理 (Central Limit Theorem)

- Let $(X_i, i \geq 1)$ be a sequence of independent random variables following the same distribution of the random variable X. Assuming the first two moments of X exist, we obtain

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma_X}(S_N - E\{X\}) \rightarrow \mathcal{N}(0,1) \text{ in distribution,}$$

where σ_X denotes the standard deviation of X.

- 意味著當 N 很大的時候，估計式 S_N 與 $E\{X\}$ 之間的誤差可以被近似為 $\frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}\varepsilon$，其中 ε 是一個標準常態隨機變數。$\frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}$ 被稱作標準誤差 (standard error, S.E.)。

信賴區間的定義

- S_N 的 $(100-\alpha)\%$ 的信賴區間為

$$\left[S_N - z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}, S_N + z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}\right]$$

  其中 $Z_{\alpha/2} > 0$ 而且 $-Z_{\alpha/2}$ 代表了一個標準常態分配的 $\alpha/2$ % 的百分位數(percentile)。

- S_N 的 95% 與 99% 的信賴區間就分別是

$$\left[S_N - 1.96 \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}, S_N + 1.96 \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}\right]$$

$$\left[S_N - 2.58 \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}, S_N + 2.58 \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}\right]$$

評價歐式選擇權

$$P(t, S_t = x) \approx S_{N1} := \frac{e^{-r(T-t)}}{N} \sum_{i=1}^{N} H\left(S_T^{(i)}\right)$$

其中第 i 個樣本為

$$S_T^{(i)} = S_t exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t} Z_i^{(i)}\right)$$

數值隨機微分方程
(Numerical Stochastic Differential Equations)

- 兩種對隨機微分方程主要的離散化方式，一是Euler離散方式（Euler scheme），另一是Milstein離散方式（Milstein scheme）。
- 考慮一維度的伊藤過程 $\mathrm{X_t}$ 定義如下：

$$\mathrm{dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t}$$

- Euler離散方式，是將上述方程式的解 X_t，利用遞迴定義的 $\hat{X}_t$ 來逼近：

$$\hat{X}_{t_{i+1}} = \hat{X}_{t_i} + \underbrace{\mathrm{a}\left(\mathrm{t_i}, \hat{X}_{t_i}\right)\Delta \mathrm{t}_i}_{\mathrm{O}(\Delta \mathrm{t})} + \underbrace{\mathrm{b}(\mathrm{t_i}, \hat{X}_{t_i})\Delta \mathrm{W_{t_i}}}_{\mathrm{O}(\sqrt{\Delta \mathrm{t}})}$$

- Milstein 離散方式所定義出的遞迴式 $\widehat{\mathrm{X}}_{\mathrm{t}}$ 如下：

$$\hat{X}_{t_{i+1}} = \hat{X}_{t_i} + \underbrace{\mathrm{a}\left(\mathrm{t_i}, \hat{X}_{t_i}\right)\Delta \mathrm{t}_i}_{\mathrm{O}(\Delta \mathrm{t})} + \underbrace{\mathrm{b}\left(\mathrm{t_i}, \hat{X}_{t_i}\right)\Delta \mathrm{W_{t_i}} + \frac{1}{2}\mathrm{b_x}\left(\mathrm{t_i}, \mathrm{X_{t_i}}\right)\mathrm{b}\left(\mathrm{t_i}, \mathrm{X_{t_i}}\right)\left(\Delta \mathrm{W}_{t_i}^2 - \Delta \mathrm{t_i}\right)}_{\mathrm{O}(\Delta \mathrm{t})}$$

強收斂 (strong convergence) 分析誤差

- Euler 離散方式

$$E\left(\sup_{0\le t_i\le T}\left|X(t_i)-\hat{X}(t_i)\right|\right)\le C\sqrt{\Delta t}$$

- Milstein離散方式

$$E\left(\sup_{0\le t_i\le T}\left|X(t_i)-\hat{X}(t_i)\right|\right)\le C\Delta t$$

弱收斂 (weak convergence) 的逼近誤差

$$\left|\mathrm{E}\{\mathrm{H}(\mathrm{X_T})|\mathrm{X_0}=\mathrm{x}\}-\mathrm{E}\left\{\mathrm{H}(\hat{X}_T)\middle|\hat{X}_0=\mathrm{x}\right\}\right|\le \mathrm{C}\Delta\mathrm{t}$$

- 在對歐式選擇權的評價上，無論是Euler 離散方式或是Milstein 離散方式都能達到相同的精準度；然而對路徑相依的選擇權，例如新奇選擇權，Milstein的離散方式仍能提供較小的偏誤。

縮減變異的基本技術

- 反變異，條件抽樣，布朗橋

反變異

- 基本觀念在於如何簡單快速的增加樣本數。
- 例如是服從標準常態分布

$$Var\left(\frac{h(X)+h(\tilde{X})}{2}\right)=\frac{Var(h(X))+Cov\left(h(X),h(\tilde{X})\right)}{2}$$

$$\leq Var(h(X))$$

若 $h(X)$ 和 $h(\tilde{X})$ 是負相關

條件抽樣

- 基於以下一個簡單的變異數分解

$$Var(V) = E[Var(V|X)] + Var(E[V|X])$$

條件期望的變異數必然不大於原來的變異數

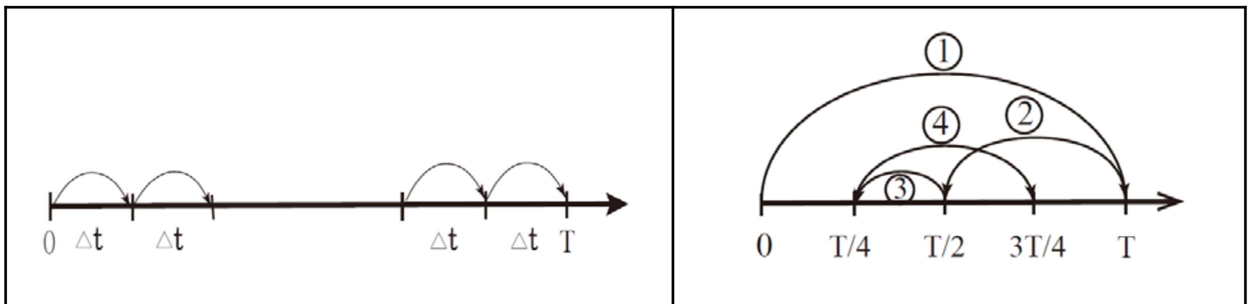
$Var(E[V|X]) \leq Var(V)$

- 蒙地卡羅在蒙地卡羅”(Monte Carlo on Monte Carlo)不偏估計式為

$$E[E(V|X)] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}V^{(j)}(X^{(i)})$$

布朗橋

- 觀念來自於一多變量常態向量的條件期望
- 它的建構方式是跳躍的而非循序漸進的



a. 傳統方式　　b. 布朗橋

傳統方式與布朗橋對布朗運動抽樣圖示

- 布朗橋軌跡的變異數依序為 T, T/4 , ⋯ T/n 而 (a) 中的變異數始終固定為 Δt。